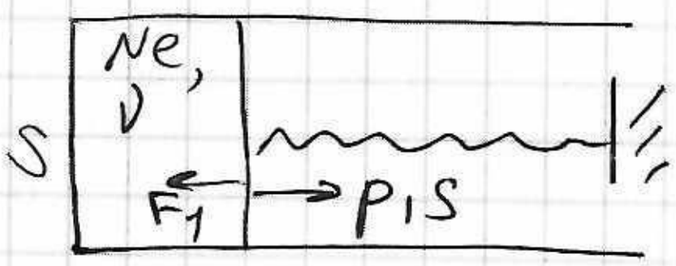
№4

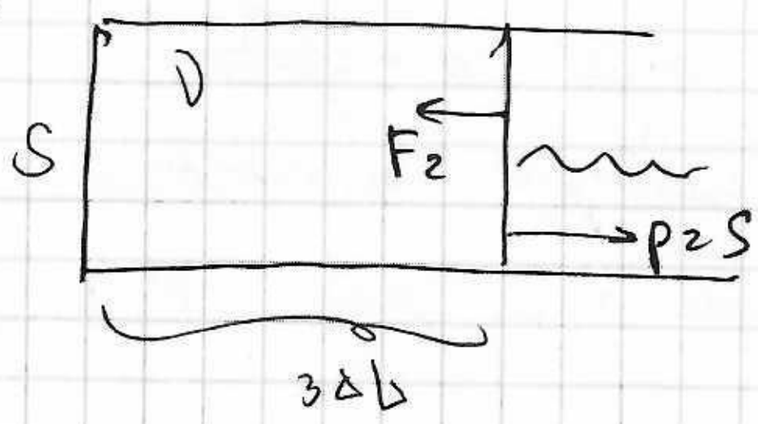
Ne => $i = 3$ – газ одноат. (3 ст. св.)

1)



$+Q$

2)



пусть ν газа внутри
при давл. p_1
S – пл. сеч. сосуда.

$F_1 = k\Delta L$ – сила упр. (k – жёст. пруж.)

$F_2 = k 3\Delta L$.

стало p_2.

2 ЗН : $pS = F$

давл. газа ↑ ↓ сила упр. пр.

$Q = A + \Delta U$ – 1 нач. т/д.

$A = -A_{упр}$, т.к. процесс квазистатический => 2 ЗН.

$$A_{упр} = -\int_{\Delta L}^{3\Delta L} kx\,dx = -\int_{\Delta L}^{3\Delta L} kx(-dx) = -\frac{kx^2}{2}\Big|_{\Delta L}^{3\Delta L} =$$

$$= -\frac{k}{2}\left(9\Delta L^2 - \Delta L^2\right) = -4k\Delta L^2$$ – раб. силы упр.

упр. сост. : $p_1 S\Delta L = \nu R T_1$

$p_2 S 3\Delta L = \nu R T_2$

2 ЗН : $p_1 S = k\Delta L$

$p_2 S = 3k\Delta L$

$$\Delta U = \frac{3}{2}\nu R(T_2 - T_1) = \frac{3}{2}\nu(3p_2 S\Delta L - p_1 S\Delta L) =$$

$$= \frac{3}{2} S\Delta L(3p_2 - p_1) = \frac{3}{2}\Delta L(9k\Delta L - k\Delta L) = 12k\Delta L^2$$

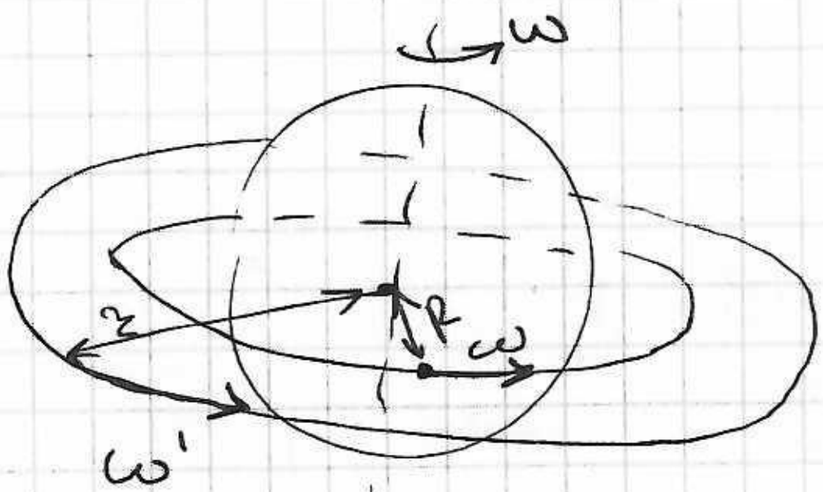
$$A = -A_{упр} = 4k\Delta L^2$$

$$Q = \Delta U + A = 16k\Delta L^2 \Rightarrow k\Delta L^2 = \frac{Q}{16} = \frac{12}{16} = \frac{3}{4} kDж$$

$$A = 4k\Delta L^2 = 4 \cdot \frac{3}{4} kPж = 3kPж$$

Ответ: $A = 3\ kDж$

№2



пусть планета вращ. с ω.

тогда 1-й сп. ~~вращ.~~ с ω.

вокр. точки центра планеты

(пусть по окр. рад. R)

2-й сп. вращ. с $\omega' > \omega$.

$\omega_{отн} = \omega' - \omega$ – отн. угл. скорость 2-го сп.

пусть T – время (длительность) суток.

$\omega_{отн}\frac{T}{2} = 2\pi R$ – т.к. за $\frac{T}{2}$ 2-й должен полностью сделать круг отн. пов-ти планеты.

так как $\omega' \neq \omega$, то min расст. l м/у спутниками равно $(R - r)$

$\omega'^2 r = G\frac{M}{r^2}$ M – масса планеты

$$\Rightarrow \omega'^2 = \frac{GM}{r^3}$$

$$\omega^2 R = \frac{GM}{R^2} \Rightarrow \omega^2 = \frac{GM}{R^3}$$

olymp.bmstu.ru

$\omega' > \omega \Rightarrow \omega'^2 > \omega^2 \Rightarrow \frac{GM}{r^3} > \frac{GM}{R^3} \Rightarrow r < R$ ($r, R > 0$)

$\Rightarrow |R - r| = R - r.$

$\varphi = \frac{\omega_{отн} T}{4\pi}$ $\quad r = \frac{(\omega' - \omega) T}{4\pi}$

$\omega T = 2\pi r \Rightarrow r = \frac{\omega T}{2\pi}$ $\quad \Rightarrow \frac{R}{r} = \frac{\omega' - \omega}{\omega} \cdot \frac{1}{2}$

Но $\frac{\omega'}{\omega} = \sqrt{\frac{GM}{r^3} \cdot \frac{R^3}{GM}} = \sqrt{\frac{R^3}{r^3}}$ $\Rightarrow$

$\frac{R}{r} = \frac{1}{2} \cdot \left(\sqrt{\frac{R^3}{r^3}} - 1 \right) \Rightarrow 2\frac{R}{r} = \sqrt{\frac{R^3}{r^3}} + 1$

∀ спутника вращ. с ω_1 по орбите r_1.

Но $a_1 = \frac{GM}{r_1^2} \Rightarrow \omega_1^2 = \frac{GM}{r_1^3}$

$\omega_1^2 r_1$ $\quad$ ‖

$\frac{(2\pi)^2}{(T_1)^2}$

$\Rightarrow \frac{T_1^2}{r_1^3} = const$

т.е. ∀ спутника отн. периода обр.^{2} к рад. орб.^{3} – const (const для всех одна)

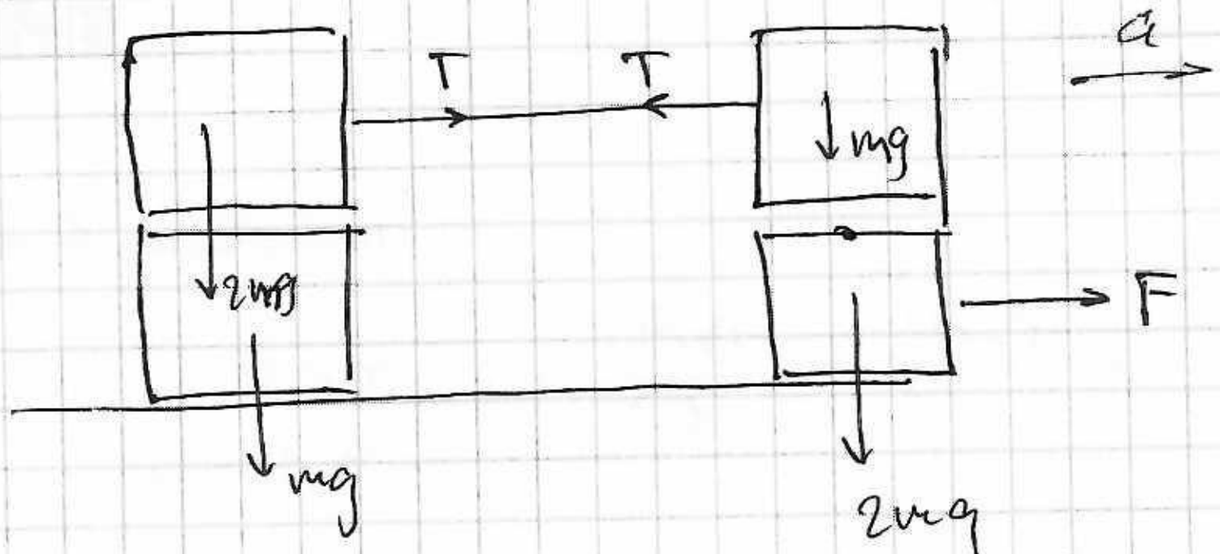
$\Rightarrow \frac{T^2}{R^3} = \frac{\left(\frac{T}{2}\right)^2}{R^3} \Rightarrow \left(\frac{R}{r}\right)^3 = \frac{T^2}{\left(\frac{T}{2}\right)^2} = 4 \Rightarrow$

$\frac{R}{r} = 4^{\frac{1}{3}} \Rightarrow R = r \cdot 4^{\frac{1}{3}} \Rightarrow$

$l = R - r = r(4^{\frac{1}{3}} - 1) \approx 0{,}59\, r.$

Ответ: $l = 0{,}59\, r.$

№ 3

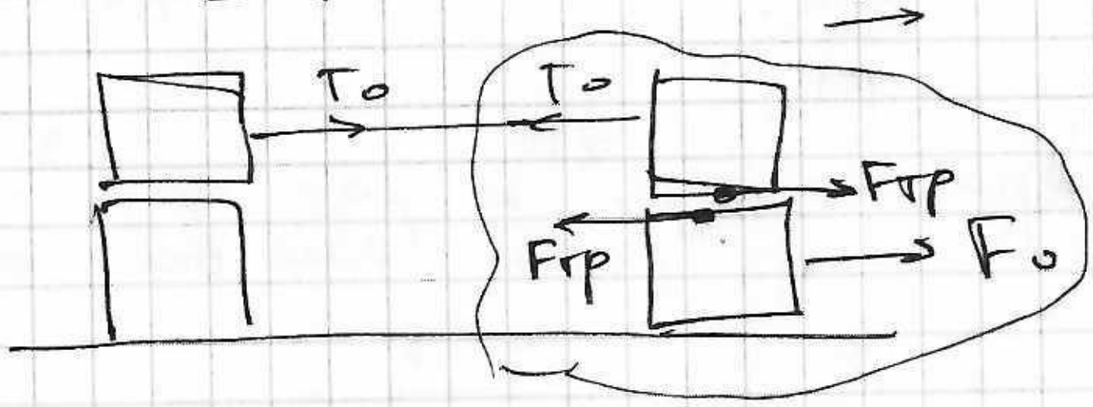


$T - ?$

констр. нат. разр. $\Leftrightarrow$ [T превосит T_0 1 сл.
кубики начнут скользить др. по другу 2 сл.

До ~~надо~~ момента как констр. нат. разр. на систему из 4-х кубиков дейст. $T = ?$, сумм. раб. силы ~~трения~~ нат. нити $= 0$ (по 3 зн. в данном сл.), сила р-ии опоры м/у куб. и со ст. плоск. раб. не сов., силы тяж. раб. не сов. $\Rightarrow$ работу по перемещ. системы сов. только F $\Rightarrow$ Кинетическая энергия.

путь 1 сл.:



$F_{тр}$ - покоя, т-к. 1 сл.

$$F_0 - T_0 = 3ma_0 \quad / \Rightarrow F_0 - T_0 = \frac{F_0}{2} \Rightarrow$$

$$F_0 = 6ma_0$$

$$T_0 = \frac{F_0}{2} \Rightarrow F_0 = 2T_0 = 2 \cdot 10 = 20\,Н.$$ (т-к. надо $T > T_0$)

$F_0 = 20\,Н \Rightarrow \tau_1 =$ ~~24 с~~ м/з столько нить порвётся в предполож., что кубики не разъедутся. Продолжение на обороте листа 4.

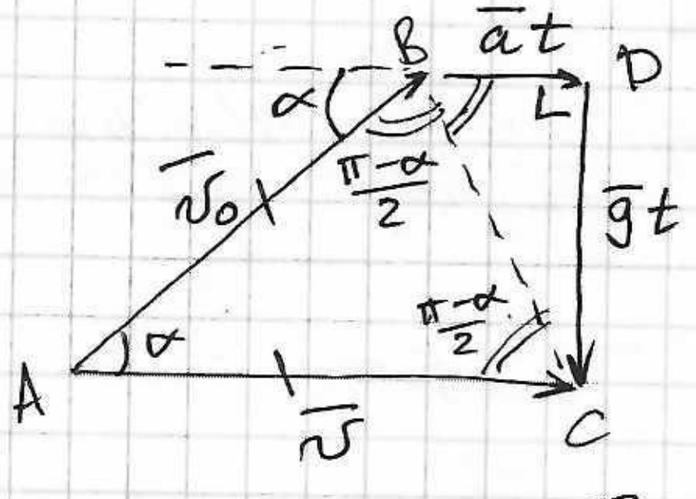
olymp.bmstu.ru

Вариант задания 2

№1

$\vec{v_0}$ – скор. при броске, $\vec{v}$ – конеч. скор., $\vec{a}$ – ускор. от ветра, t – время полёта до забора.

α – под таким углом к гор. бросили.

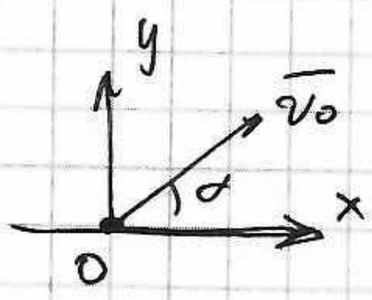


$|\vec{v_0}| = |\vec{v}| \Rightarrow \triangle ABC$ – р/б $\Rightarrow$

$\widehat{ABC} = \widehat{ACB} = \frac{\pi-\alpha}{2}$

$(BD) \parallel (AC) \Rightarrow \widehat{CBD} = \frac{\pi-\alpha}{2}$

$$\frac{g}{a} = \frac{gt}{at} = tg\left(\frac{\pi-\alpha}{2}\right) \text{ – из } \triangle BCD. \quad (1)$$



$$\left.\begin{aligned} y &= v_0 \sin\alpha\, \tau - \frac{g\tau^2}{2} \\ x &= v_0 \cos\alpha\, \tau + \frac{a\tau^2}{2} \end{aligned}\right\} \text{ коорд. } x, y \text{ от вр. с броска } \tau.$$

$x(\tau = t) = L$: $\quad L = v_0 \cos\alpha\, t + \frac{at^2}{2} \Rightarrow$

$$a = \frac{2L - 2v_0 \cos\alpha\, t}{t^2} \text{ – подст. в (1):}$$

$$\frac{gt^2}{2L - 2v_0 \cos\alpha\, t} = tg\left(\frac{\pi-\alpha}{2}\right) = \frac{1}{tg\left(\frac{\alpha}{2}\right)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow gt^2 \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = 2L - 2v_0 t \cancel{\frac{1}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}}\left(\frac{2}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}} - 1\right)$$

ещё из рисунка $\Rightarrow$ $v_0\cos\alpha - at = v_0$ (2)

$\Rightarrow$ $gt = v_0\sin\alpha$ (3)

$L = v_0\cos\alpha\, t + \frac{at^2}{2}$ (4)

(2), (4) $\Rightarrow$ $L = v_0\cos\alpha\, t + \frac{(v_0 - v_0\cos\alpha)t}{2} \Rightarrow$

$L = v_0\left(t\cos\alpha + \frac{1-\cos\alpha}{2}t\right) \overset{(3)}{\Rightarrow}$

$L = \frac{gt^2}{\sin\alpha}\left(\cos\alpha + \frac{1-\cos\alpha}{2}\right) \Rightarrow \frac{L}{gt^2} = \frac{2\cos\alpha}{2\sin\alpha} + \frac{1-\cos\alpha}{2\sin\alpha} =$

$= \frac{1+\cos\alpha}{2\sin\alpha} = \frac{1+\sqrt{1-\sin^2\alpha}}{2\sin\alpha} \Rightarrow$

$\frac{2L\sin\alpha}{gt^2} - 1 = \cancel{+} \sqrt{1-\sin^2\alpha} \Rightarrow \frac{4L^2\sin^2\alpha}{g^2t^4} - \frac{4L\sin\alpha}{gt^2} + \cancel{1} =$

$= \cancel{1}-\sin^2\alpha \Rightarrow \left(\frac{4L^2}{g^2t^4} + 1\right)\sin^2\alpha - \frac{4L}{gt^2}\sin\alpha = 0 \Rightarrow$

$\left(\frac{4L^2}{g^2t^4} + 1\right)\sin\alpha = \frac{4L}{gt^2} \Rightarrow \sin\alpha = \frac{\frac{4L}{gt^2}}{\frac{4L^2}{g^2t^4} + 1} =$

$= \frac{\frac{4\cdot 6{,}4}{10\cdot 0{,}8^2}}{\frac{4\cdot 6{,}4^2}{10^2\cdot 0{,}8^4} + 1} \approx 1{,}52$

(2), (3) $\Rightarrow$ $at = (1-\cos\alpha)\frac{gt}{\sin\alpha} \Rightarrow$

$a\sin\alpha = \cancel{g}(1-\cos\alpha)g \Rightarrow$

$a\sqrt{1-\cos^2\alpha} = (1-\cos\alpha)g \Rightarrow$

$a^2(1-\cos^2\alpha) = (1-2\cos\alpha+\cos^2\alpha)g^2 \Rightarrow$

$a^2 - a^2\cos^2\alpha = g^2 - 2g^2\cos\alpha + g^2\cos^2\alpha \Rightarrow$

$(a^2+g^2)\cos^2\alpha - 2g^2\cos\alpha + g^2 - a^2 = 0 \Rightarrow$

$$\cos\alpha = \frac{2g^2 \pm \sqrt{4g^4 - 4(a^2+g^2)(g^2-a^2)}}{2(a^2+g^2)} =$$

$$= \frac{g^2 \pm a^2}{a^2+g^2}$$ но $\oplus$ не подх., т.к. $\cos\alpha \neq 1$ ($L > 0$)

$$\Rightarrow \cos\alpha = \frac{g^2-a^2}{g^2+a^2}.$$

$$(4) \Rightarrow L = v_0 t \frac{g^2-a^2}{g^2+a^2} + \frac{at^2}{2} \quad (2) \Rightarrow$$

$$L = \frac{at^2}{1-\cos\alpha} \cdot \frac{g^2-a^2}{g^2+a^2} + \frac{at^2}{2} \Rightarrow$$

$$L = \frac{at^2}{\frac{2a^2}{g^2+a^2}} \cdot \frac{g^2-a^2}{g^2+a^2} + \frac{at^2}{2} \Rightarrow$$

$$L = \frac{t^2(g^2-a^2)}{2a} + \frac{a^2t^2}{2a} = \frac{t^2(g^2-a^2+a^2)}{2a} \Rightarrow$$

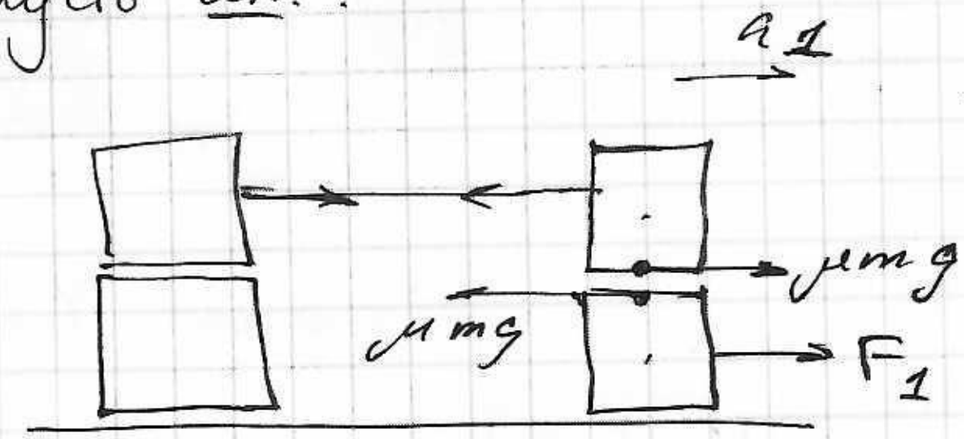
$$2aL = t^2g^2 \Rightarrow a = \frac{t^2g^2}{2L} = \frac{0{,}8^2 \cdot 10^2}{2 \cdot 6{,}4} = 5\ \frac{м}{с^2}$$

$$v_0 = \frac{at}{1-\cos\alpha} = \frac{at}{1-\frac{g^2-a^2}{g^2+a^2}} = \frac{5 \cdot 0{,}8}{1-\frac{10^2-5^2}{10^2+5^2}} = 10\ \frac{м}{с}$$

Ответ: $v_0 = 10\ \frac{м}{с}$

$a = 5\ \frac{м}{с^2}$

пусть 2сл.:



+y+ Fтр скольж.

$$F_1 - \mu mg = 2ma_2 \Big| \Rightarrow F_1 - \mu mg = \frac{F_1}{3} \Rightarrow$$

$$6ma_1 = F_1$$

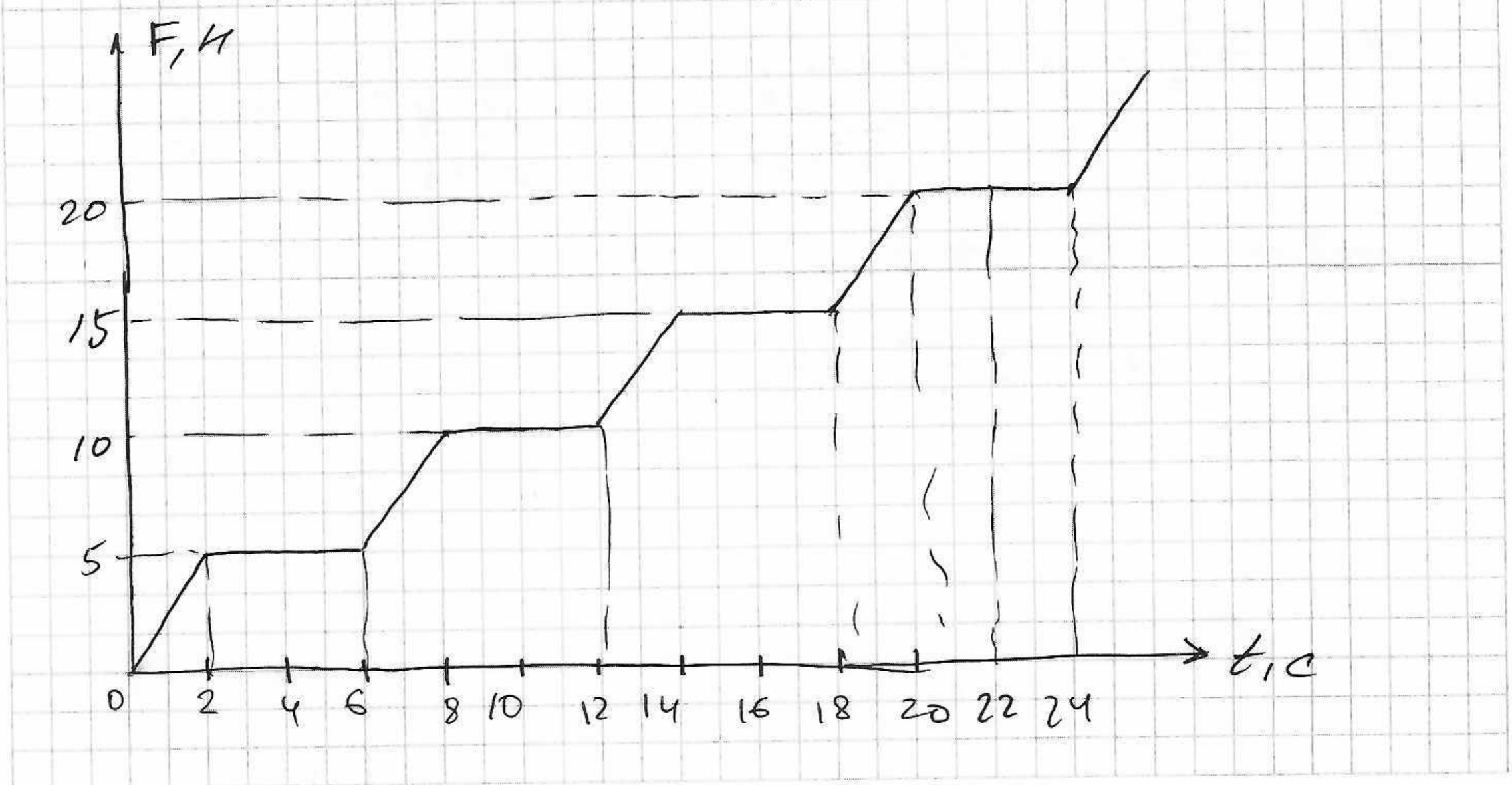
$$\frac{2}{3}F_1 = \mu mg \Rightarrow F_1 = \frac{3}{2}\mu mg = \frac{3}{2}\cdot 0{,}5\cdot 2\cdot 10 = 15\ Н$$

~~Вск~~ F превыс. F_1 при $t_2 = 18c$ (а чтобы кубики разъех., надо х.-бы слегка превыс. max силу тр. покоя $= \mu N$)

~~$t_1 > t_2$~~ $\Rightarrow t_2 < t_1 \Rightarrow$ кубики сначала разъед.

$t = \min(t_1, t_2) = t_2 = 18c$

Ответ: $t = 18\ c$.



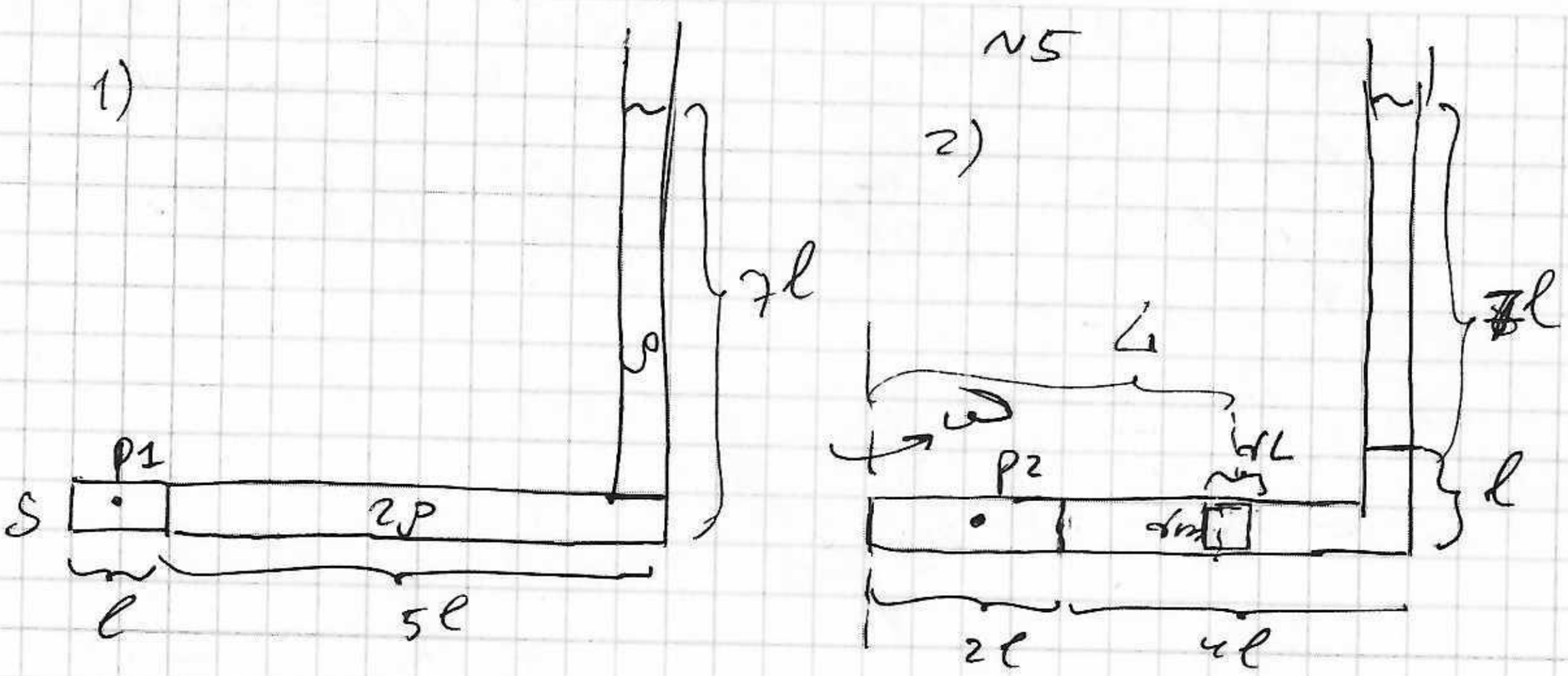
olymp.bmstu.ru

Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования
«Московский государственный технический университет
имени Н.Э. Баумана (национальный исследовательский университет)»

ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ «ШАГ В БУДУЩЕЕ»

Вариант задания 2

№5



пусть S - сеч. трубки; $p_1; p_2$ - давл. возд. в тр. в 1 и 2 сл. соотв.

Запишем ~~ур.~~ ~~равновесия~~ 2ЗН для нижн. пл. 2р.

1) $p_1 S = \rho g 7l S \Rightarrow p_1 = 7\rho g l$

2) $\int_{2l}^{4l} \omega^2 L \, 2\rho S \, dL = (\rho g 7l + 2\rho g l) S - p_2 S$

$(dm = 2\rho S dL)$

$\Rightarrow 2\omega^2 \rho S \frac{L^2}{2}\Big|_{2l}^{4l} = 9\rho l g S - p_2 S \Rightarrow$

$2\omega^2 \rho S (16l^2 - 4l^2) = 9\rho l g S - p_2 S \Rightarrow$

$p_2 = 9\rho g l - 12\omega^2 \rho l^2$

3-й Бойля - Мариотта для газа:

$p_1 Sl = p_2 S 2l \Rightarrow p_1 = 2p_2$

Можно использовать оборот листа для записи решений

Итак, $p_1 = 2p_2$

$p_2 = 9\rho g l - 12\omega^2 \rho l^2$ /

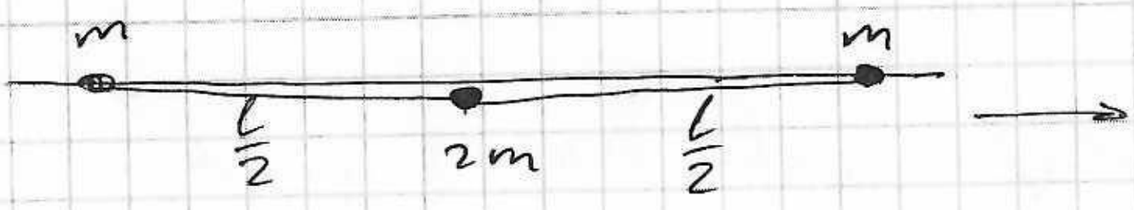
$p_1 = 7\rho g l$

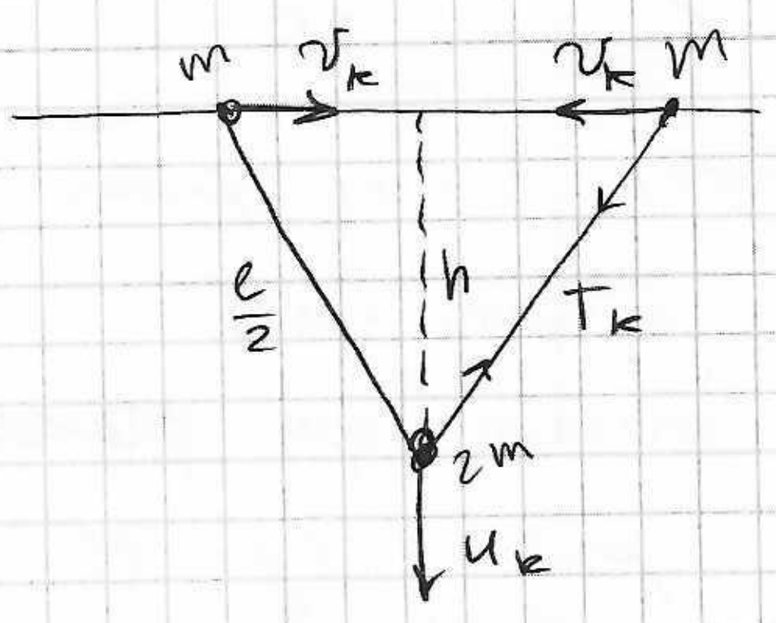
$7\rho g l = 18\rho g l - 24\omega^2 \rho l^2 \Rightarrow 24\omega^2 \rho l^2 = 11\rho g l \Rightarrow$

$\omega^2 = \frac{11\rho g l}{24\rho l^2} = \frac{11g}{24l} \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{11}{24}\cdot\frac{g}{l}} =$

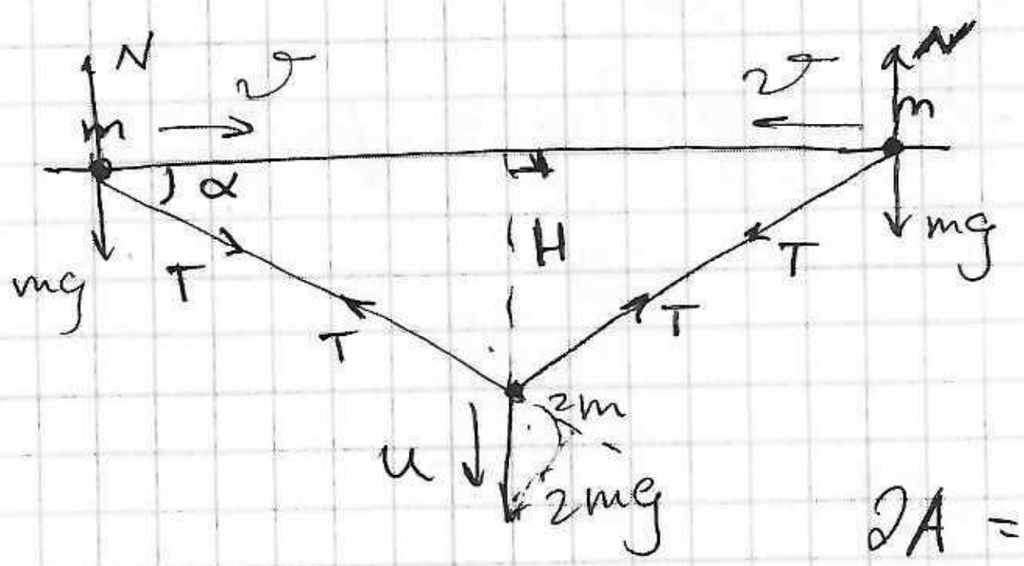
$= \frac{\sqrt{66}}{12}$

Ответ: $\omega = \sqrt{\frac{11}{24}\cdot\frac{g}{l}}$





рассм. произв. момент:



$T\cos\alpha = m\frac{dv}{dt}$

$2mg - 2T\sin\alpha = 2m\frac{du}{dt}$

$\Rightarrow mg - T\sin\alpha = m\frac{du}{dt}$

$\partial A = 2mg\,u\,dt - 2T\sin\alpha\,u\,dt + 2T\cos\alpha\,v\,dt$ — сумма раб. всех сил за dt.

Т. об изм. $E_{кин}$: $\partial A = dE_{кин}$

$dE_{кин} = d\left(\frac{mv^2}{2} + \frac{mv^2}{2} + \frac{2mu^2}{2}\right) = d(mv^2 + mu^2) = m\,d(v^2+u^2) =$

$= m\cdot(2v\,dv + 2u\,du)$

$\Rightarrow 2mg\,u\,dt - 2T\sin\alpha\,u\,dt + 2T\cos\alpha\,v\,dt =$

$= 2v\,m\,dv + 2m\,u\,du$

olymp.bmstu.ru

Нить нерастяж. и не провесс. => $\vartheta\cos\alpha = u\sin\alpha$

Итак, $T\cos\alpha\,dt = m\,d\vartheta$ (1)

$mg\,dt - T\sin\alpha\,dt = m\,du$ (2)

$mgu\,dt - T\sin\alpha\,u\,dt + T\cos\alpha\,\vartheta\,dt = \vartheta m\,d\vartheta + mu\,du$ (3)

$\vartheta\cos\alpha = u\sin\alpha$. (4)

(3), (1)

(2), (3) => $\left(mgu - T\sin\alpha\,u + T\cos\alpha\,\vartheta\right)\cdot\frac{m\,d\vartheta}{T\cos\alpha} = m\vartheta\,d\vartheta + mu\,du$

$$\Rightarrow \left(\frac{mgu}{T\cos\alpha} - u\,tg\alpha + \vartheta\right)m\,d\vartheta = m\vartheta\,d\vartheta + mu\,du$$

(1), (2) =>

(1), (2) => $\frac{mg\,dt - T\sin\alpha\,dt}{T\cos\alpha\,dt} = \frac{du}{d\vartheta}$ =>

$$\frac{mg}{T\cos\alpha} - tg\,\alpha = \frac{du}{d\vartheta}$$

$\vartheta\cos\alpha = u\sin\alpha\ /d(\ldots)$ => $d\vartheta\cos\alpha + \vartheta(-\sin\alpha)\,d\alpha = du\sin\alpha + u\cos\alpha\,d\alpha$

=> $d\vartheta\cos\alpha - \vartheta\sin\alpha\,d\alpha - u\cos\alpha\,d\alpha = du\sin\alpha$

$$\Rightarrow \frac{du}{d\vartheta} = \frac{d\vartheta\cos\alpha - \vartheta\sin\alpha\,d\alpha - u\cos\alpha\,d\alpha}{\sin\alpha\,d\vartheta} =$$

$$= \frac{1}{tg\alpha} - \vartheta\frac{d\alpha}{d\vartheta} - \frac{u\,d\alpha}{d\vartheta}\cdot\frac{1}{tg\alpha}$$

$N = mg + T\sin\alpha$

$2N = 4mg - 2T\sin\alpha$

Umax, $T\cos\alpha\,dt = m\,dv$

$mg\,dt - T\sin\alpha\,dt = m\,du$

$v\cos\alpha = u\sin\alpha$

$N = mg + T\sin\alpha$

$4mg - 2N = \frac{4m}{2}\frac{du}{dt} = \frac{2m\,du}{dt}$ $\Rightarrow$

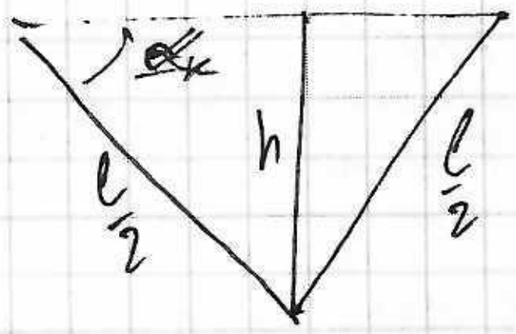
$dA = 2mg\,dH - 2T\sin\alpha\,u\,dt + 2T\cos\alpha\,v\,dt =$

$= 2mg\,dH + 2T\,dt(\underbrace{v\cos\alpha - u\sin\alpha}_{0}) \Rightarrow$

$dA = 2mg\,dH$, т.е $A = 2mgh$.

$A = \frac{mv_k^2}{2} + \frac{mv_k^2}{2} + \frac{2mu_k^2}{2} = m(v_k^2 + u_k^2) \Rightarrow$

$2gh = v_k^2 + u_k^2$



но $v_k\cos\alpha_k = u_k\sin\alpha_k$

$v_k\frac{\sqrt{(\frac{l}{2})^2 - h^2}}{\frac{l}{2}} = u_k\frac{h}{\frac{l}{2}} \Rightarrow$

$u_k = v_k\frac{\sqrt{(\frac{l}{2})^2 - h^2}}{\frac{l}{2}} \cdot \frac{\frac{l}{2}}{h} =$

$= v_k \cdot \frac{\sqrt{(\frac{1,5}{2})^2 - 0,45^2}}{0,45} = \frac{4}{3}v_k$

$2gh = v_k^2 + (\frac{4}{3})^2 v_k^2 = \frac{25}{9}v_k^2 \Rightarrow$

$v_k = \sqrt{\frac{9}{25}\cdot 2gh} = \sqrt{\frac{9}{25}\cdot 2\cdot 10\cdot 0,45} = 1,8\ \frac{м}{с}$

$u_k = \frac{4}{3}v_k = \frac{4}{3}\cdot 1,8 = 2,4\ \frac{м}{с}$

Продолж. на обороте листа 7

olymp.bmstu.ru

Ситуационная ~~2~~ задача.

$2Al + 3O_2 = 2Al_2O_3 + Q$

окись алюминия.

$V = 1л$

$m_{к_0} = 0{,}72г$, $V_{к_0}$

$m_{Ал_0}$ - ?

$T_1 = 293К$

$M_O = 16 \frac{г}{моль}$, ~~$M_{ал}$~~, $M_{ал} = 27 \frac{г}{моль}$

$M_{O_2} = 32 \frac{г}{моль}$

$M_{окиси} = 2M_{Ал} + 3M_O$.

рассм. р-цию, где $\nu_{ал}$ алюм. ~~реаг~~ реагир. с $\nu_{кис}$ кис.

$\nu_{ал} \cdot M_{ал} = m_{ал}$, $\nu_к \cdot M_к = m_к$

$\nu_{ал} : \nu_{ок} = 2 : 3 \Rightarrow \frac{m_{ал}}{M_{ал}} : \frac{m_к}{M_к} = 2 : 3$

~~$\nu_{Ал} Al + \nu_к O_2 = \nu_{окиси} Al_2O_3 + Q$~~

1) $\frac{m_{к_0}}{2}$ перешло в окись, $\nu_{окиси} = \frac{2}{3} \frac{m_{к_0}}{2M_{O_2}}$ - столько окиси обр.

2 Ур. тепл. баланса:

~~$c_{кисл.}(T_к + T_0) \pm$~~ .. $Q_{отд} = Q_{пол}$

$m_{к_0} = 0{,}72г$, $M_{O_2} = 32 \frac{г}{моль} \Rightarrow \nu_{O_2} = \frac{m_{к_0}}{M_{O_2}} = \frac{0{,}72}{32} =$

$= \frac{9}{400}$ моль - столько кислорода было

$$T\cos\alpha_k \cdot \frac{m\,d(tg\alpha)}{mg - T\sin\alpha} = m\,\frac{dv}{dt}$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{mg}{T\cos\alpha} - tg\alpha$$

Отсюда $\max T$.